Übung Nullstellen ganzrationaler Funktionen - Lösung

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$$

- **Nullstellen bestimmen**

1. **Erste Nullstellen durch Ausprobieren herausfinden**

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^3 + \frac{3}{2} \cdot 1^2 - 1 - \frac{3}{2} = 1 + \frac{3}{2} - 1 - \frac{3}{2} = 0 \\ f(2) &= 2^3 + \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 2 - \frac{3}{2} = 8 + 6 - 2 - \frac{3}{2} = 10,5 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x)$ **hat eine Nullstelle bei** $\mathbf{x_1 = 1}$

2. **Polynomdivision durch den Linearfaktor** $(x - x_1) = (x - 1)$

$$\begin{array}{l} \Big(\; x^3 + \frac{3}{2}x^2 \; - x - \frac{3}{2} \Big) : \Big(x - 1 \Big) = x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \\ \underline{- x^3 \;\; + x^2} \\ \qquad \frac{5}{2}x^2 \;\; - x \\ \qquad \underline{- \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x} \\ \qquad\qquad \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \\ \qquad\qquad \underline{- \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

3. **Weitere Nullstellen mit Mitternachtsformel berechnen:**

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} &= 0 \\ x_{2/3} &= \frac{-\frac{5}{2} \pm \sqrt{(\frac{5}{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2}}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}}{2} = \frac{-\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}}{2} \\ \mathbf{x_2} &= \mathbf{-1} \qquad \mathbf{x_3} = -\mathbf{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Funktion hat insgesamt drei Nullstellen:

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = -\frac{3}{2}$$